



TITLE:

3状態IRFの厳密解: ロジャース, ラマヌジャン恒等式のゴルドン一般化(ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題, 研究会報告)

AUTHOR(S):

国場, 敦夫; 阿久津, 泰弘; 和達, 三樹

CITATION:

国場, 敦夫 ...[et al]. 3状態IRFの厳密解: ロジャース, ラマヌジャン恒等式のゴルドン一般化(ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題, 研究会報告). 物性研究 1986, 46(1): 13-17

ISSUE DATE:

1986-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/91975>

RIGHT:

共鳴周波数 ω_i は、先に述べたとおり、 M (終状態の2つの量子ソリトンのうち一方に含まれる粒子数) の関数である。(図2)

したがって、 $M \ll N/2$ なる ω_i をえらべば、終状態には大きさのちがう2つのソリトンが得られるし、 $M \sim N/2$ なる ω_i をえらべば、大きさのほぼ等しい2つのソリトンが得られる。

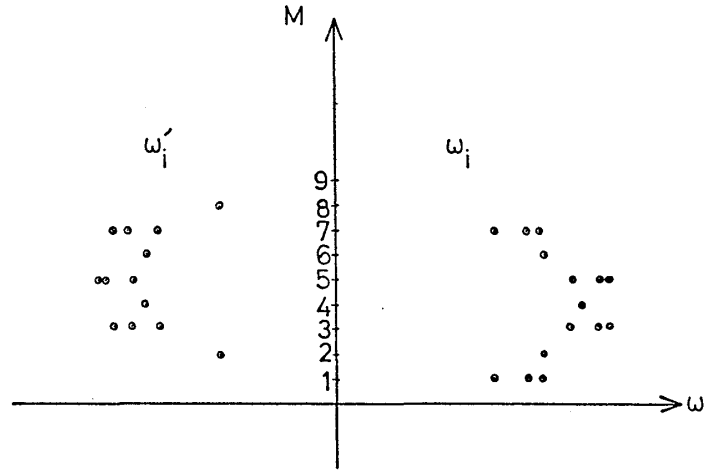


図 2

§ 6 今後の展望

今回発見された resonant breakup という現象が、他の量子ソリトン系及び古典ソリトン系でみつかることは大いに期待できる。また、系に散逸が加わったときに、素過程としての resonant breakup がアトラクタ間の飛びうつりにどう寄与するか興味深い。更に基本的な問題として、可積分量子系の特徴付けと量子系のKAM理論が重要である。

ソリトンは、発見されて以来、その安定性が注目を集めてきた。一方、系が複雑な挙動を示すためには、ソリトン数が増加するようなプロセスが重要である。ソリトンの生成と消滅に関して resonant breakup は基本的な過程であると予想することが可能である。

3 状態 I R F の厳密解

—ロジャース，ラマヌジャン恒等式のゴルドン一般化—

東大・教養 国場敦夫，阿久津泰弘，和達三樹

IRF とは 2 次元正方格子上的 4 体スピン相互作用の模型である。各格子点 $i \in \mathbb{Z}^2$ にスピン変数 $\sigma_i \in S$ を置き、図1のような格子の最小単位 (face または plaquette) に minimal な相互作用エネルギー $\varepsilon(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l)$ を与える。(Interaction round a face)

ここで、 S は適当な数の集合であり、例えば $S = \{0, 1\}$ なら 2 状態模型、 $S = \{0, 1, 2\}$ なら 3 状態模型 etc... となる。系の全エネルギーは

$$E = \sum_{\text{faces}} \varepsilon(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) \quad (1)$$

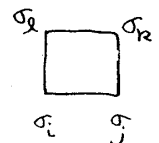


図 1

で与えられる。いま,

$$W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) = \exp \left[\frac{-\varepsilon(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l)}{k_B T} \right] \quad (2)$$

なる量を考えると, これは図1のIRF配置のBoltzmann weightとなるから, 分配関数を Z とすると

$$\begin{aligned} Z &= \sum e^{-\beta E} \quad (\beta^{-1} = k_B T) \\ &= \sum_{\text{faces}} \prod W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで \sum は状態和を表わす。

あるクラスのIRF模型と頂点模型はWu-Kadanoff-Wegner変換により同等となる。

いま k -状態模型を考えると, 一般には k^4 個のIRF配置が存在する。これに対応してBoltzmann weightも k^4 個あるが, このうち全体を定数倍する自由度はtrivialなので, 相互作用の全空間 T は $k^4 - 1$ 次元の射影空間となる。Baxter¹⁾は系のサイズが無限大の極限で Z が厳密に求まるためには, 3つのBoltzmann weightのセット $\{W(a, b, c, d)\}, \{W'(a, b, c, d)\}, \{W''(a, b, c, d)\}$ ($a, b, c, d \in S$)があつて k^6 個の関係式

$$\begin{aligned} \sum_c W(b, d, c, a) W'(a, c, f, g) W''(c, d, e, f) \\ = \sum_c W(c, e, f, g) W'(b, d, e, c) W''(a, b, c, g) \end{aligned} \quad (4)$$

をみたすことが十分条件であることを示した。(4)をstar-triangle relation (STR)と呼ぶ。

(図2 参照)

STRは転送行列の交換条件であり, 解けるモデルに普遍的に現われる関係式である。では(4)を満たすようなBoltzmann weightのセットをいかに見つける

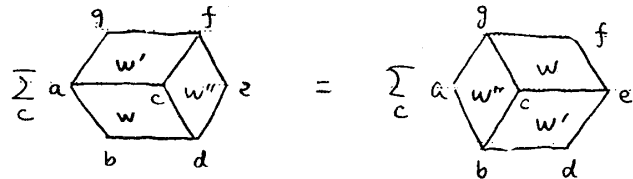


図 2

か? これに対し, 現在知られているほとんどの場合は次のようにする。まず, spectral parameterと呼ばれる変数 u を導入し, W, W', W'' にそれぞれ u, u', u'' を割りあてる。次に

$$u'' = u' - u \quad (5)$$

により, (4)を k^4 個の未知関数 $W(a, b, c, d; u)$ に対する関数方程式にして解く。つまり T のすべての点ではないが, その中に u でパラメトライズされる“solvable line”を見いだそうとするわけである。この方法(量子逆散乱法, QISM)によればSTR(4)が解を持てば解ける格子模型がつくれるわけで, 新しい厳密解をsystematicに探すことが可能となる。数学的に言う

と解ける相互作用は相互作用の全空間 T の中で部分多様体をなし、そのひとつの既約成分を R とすると

$$\pi : R \rightarrow B$$

という fiber space の構造を持つ。この場合、各々の fiber $R_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in B$ は u でパラメトライズされる 1 次元空間であり、base space B の自由度は大雑把に言って温度に相当する。これまでに解かれた IRF のうち、もっとも典型的な例は Baxter の hard hexagon モデルである。これは 2 状態 ($\sigma_i = 0, 1$) で、対称性

$$W(a, b, c, d) = W(c, b, a, d) = W(a, d, c, b) \quad (6)$$

と最隣接スピン σ_i, σ_j に対する制限

$$0 \leq \sigma_i + \sigma_j \leq 1 \quad (7)$$

を課したモデルである。 $\sigma_i = 1$ スピンを中心とする 6 角形を描くと条件(7)は 6 角形同志がかさならない条件となる (但しあるパラメータ域で) ので、こういう名前がついている。我々は 3 状態 ($\sigma_i = 0, 1, 2$) で対称性(6)と最隣接スピン σ_i, σ_j に対する条件

$$0 \leq \sigma_i + \sigma_j \leq 2 \quad (8)$$

を課した IRF の STR を解いた。格子気体的描像としては、 $\sigma_i = 2$ を大きな hexagon, $\sigma_j = 1$ を小さな square と見て、hard hexagon と hard square の mixture と思うこともできる。この場合、許される IRF 配置は 26 個、独立な Boltzmann weight は 15 個、STR が 37 個となる。解はヤコビの楕円シタ関数

$$\theta_1(u, q^2) = \sin u \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2u + q^{4n}) (1 - q^{2n}) \quad (9)$$

によってパラメトライズされる。詳しくは文献 2) を見られたい。

こうして u でパラメトライズされた Boltzmann weight を用いると free energy や spin density を厳密に計算できるのだが、ここではそれに関する技術的な話はスキップして spin density の表式が数論的問題にかかわってくることを説明しよう。突然であるが、表題にある Rogers-Ramanujan の恒等式とはオリジナルには次の 2 つである。

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} \quad (10. a)$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})} \quad (10. b)$$

(10)式は自然数 n の分割に関する数論的事実の表現になっている。それを見るために、次のように量 $F(\sigma_1, q)$ ($\sigma_1 = 0, 1$) を定義しよう。

$$F(\sigma_1, q) = \sum' q^{\sum_{i=1}^{\infty} i\sigma_{i+1}} \quad (11)$$

ここで \sum' とは $\sigma_2, \sigma_3, \dots = 0, 1$ に対する和であり、

$$0 \leq \sigma_i + \sigma_{i+1} \leq 1, \quad i \leq 1 \quad (12)$$

の制限のもとでとる。(11)の F は(12)の $i = 1$ の場合の条件式を通して σ_1 の関数となる。簡単な計算により、 $F(0, q)$, $F(1, q)$ はそれぞれ (10. a), (10. b) の左辺に一致することがわかる。では(11)の右辺で q^l の係数はいくつだろうか？それは自然数 l を(12)の制限のもとに

$$l = \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 + \cdots \quad (13)$$

の形に分割するし方の数である。数論の定理によると、これは $\text{mod } 5$ でみて、 $n \neq 0, \pm(2 - \sigma_1)$ の数にのみ分割するし方の数に等しい。このことから Rogers-Ramanujan 恒等式(10)が導かれる。実際(10)の両辺は上記の分割の生成関数となっている。注目すべきは自然数の分割のし方に課された条件(12)が hard hexagon のハードコア条件(7)に他ならないことである。実際 Baxter による corner transfer matrix 法¹⁾を用いて spin density $\langle \sigma_1 \rangle$ を計算すると、hard hexagon モデルに対し、(あるパラメタ領域で)

$$\langle \sigma_1 \rangle = \frac{r_0^2 F(1, q)}{F(0, q) + r_0^2 F(1, q)} \quad (14)$$

を得る。(r_0, q は Boltzmann weight に関係するパラメタ) 大雑把に言うと、 $F(\sigma, q)$ とは σ_1 が σ の値をとるときの全平面の Boltzmann weight である。このように IRF の特徴的な様相は corner transfer matrix 法により spin density の厳密な表式を計算すると IRF スピンの配列が、Rogers-Ramanujan type の恒等式が持つ自然数の分割パターンと対応するところにある。この R-R type の恒等式により (14) は単項式 (無限乗積) に整理され、臨界点近傍の振る舞いが解析可能となる。こういう観点からすると hard hexagon の可解性は Rogers-Ramanujan 恒等式の存在に帰するともいえよう。一方、数論においては R-R 恒等式のさまざまなバラエティが考えられている。では他の R-R type の恒等式によりその可解性が期待される IRF モデルはないだろうか？これにそぐうものが、表題の Gordon's generalization of Rogers-Ramanujan identities

(GGRRI) である。この拡張された Rogers-Ramanujan 恒等式の左辺が持つ自然数の分割パターンを IRF スピンの言葉に翻訳したものが、我々のモデルの条件式(8)なのである。実際 $\langle \sigma_1 \rangle$ を計算すると(14)の3状態へ拡張された表式を得る。詳しくは文献2)を見られたい。

以上、解ける IRF の背後に Rogers-Ramanujan type の恒等式があることを強調したが、実は R-R type 恒等式の背後にはユークリッド型 Kac-Moody Lie 環の表現論がある。だとすれば、可積分性を特徴付ける STR(4) の代数的構造はこの無限次元の代数とどうかかわるのか？その解明は今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) R. J. Baxter: *Exactly Solved Models in Statistical Physics*. (Academic Press, 1982)
- 2) A. Kuniba, Y. Akutsu and M. Wadati, exactly solvable IRF models I, J. Phys. Soc. Jpn., to appear.

Prolongation Structures of Nonlinear Equations and Infinite Dimensional Algebras

筑波大・物理 表 実

2次元の積分可能な非線形系は、Prolongation 構造をもつ。この報告では、この観点から非線形方程式に特有な無限次元代数について調べる。

一般に局所座標 q^m ($m = 1, 2, \dots$) をもつ空間の Vector 場 $V_a(q)$ は

$$V_a(q) = V_a^{(m)}(q) \frac{\partial}{\partial q^m},$$

とあらわされ、交換子積

$$[V_a, V_b] = (V_a^{(n)} \partial_n V_b^{(m)} - V_b^{(n)} \partial_n V_a^{(m)}) \frac{\partial}{\partial q^m},$$

をもつ。今無限次元空間 $(q_1^{(m)}, q_2^{(m)})$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) の Vector 場 $T_a^{(m)}$ ($a = 1, 2, 3$), D

$$T_1^{(m)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ q_1^{(n+m)} \frac{\partial}{\partial q_1^{(n)}} - q_2^{(n+m)} \frac{\partial}{\partial q_2^{(n)}} \},$$